Справочные материалы
Базовый уровень
Производная

Основные связи между функцией и производной выражены в таблице

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
возрастает ↗	$f'(x) \geq 0$
убывает ↘	$f'(x) \leq 0$
точка минимума ↘↗	$f'(x)$=0 и меняет знак с «–» на «+»
точка максимума ↗↘	$f'(x)$=0 и меняет знак с «+»на «–»
точка экстремума	$f'(x)$=0 и меняет знак

Максимум – максимальное значение функции. То есть «точка экстремума» – это x, а «экстремум» – это y. Обратите внимание, что точка, в которой $f'(x) = 0$ входит и в промежуток убывания и в промежуток возрастания

Основная формула для производной и касательной: $f'(x) = k = tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$y = kx + b$ – уравнение касательной

В точке касания $y(x) = f(x)$ (касательная и график имеют общую точку)

Примечание. Точная формула касательной в точке x_0: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, нормали (перпендикуляра): $y = -\frac{(x-x_0)}{f'(x_0)} + f(x_0)$

Условие параллельности прямых $y_1 = k_1x + b_1$ *и* $y_2 = k_2x + b_2$ *:* равенство угловых коэффициентов $k_1 = k_2$

В заданиях с функциями вида $y = log_t(ax^2 + bx + c)$ экстремум достигается в точке вершины параболы: $y = \frac{-b}{2a}$

Условие, при котором прямая является касательной $\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$

Правила дифференцирования

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на некотором множестве I, c_1 и c_2 — любые действительные числа. Тогда на множестве I справедливы соотношения:

- $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$,
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $g \neq 0$,
- $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Основные формулы дифференцирования.

1. $C' = 0\ (C = const)$, т.е. 5’=0; 7’=0 и т.д.
2. $(kx + b)' = k$; $x' = 1$
3. $(x^a)' = ax^{a-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x$

Для первообразной $y = F(x)$ нужно помнить $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Если не знаете как решить задание 14, то попробуйте подставить «удобовычислимые значения»: если есть парабола, то её вершину; если есть натуральный логарифм, то должно получиться ln 1; для экспоненты: e^0.

Справочные материалы

Производная и ее свойства

Определение: Пусть функция $f(x)$ определена в точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δf и составим отношение. Если существует предел этого отношения при Δx стремящемся к нулю, то указанный предел называют производной функции $f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$. Иначе говоря:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(Δf — приращение функции, Δx — приращение аргумента).

Если в каждой точке x из множества I у функции $f(x)$ существует производная, то такая функция называется дифференцируемой на множестве I.

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$— угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0\ ;\ f(x_0))$ *уравнение касательной* в этой точке $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Правила дифференцирования

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на некотором множестве I, c_1 и c_2 — любые действительные числа. Тогда на множестве I справедливы соотношения:

1. $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$,
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $g \neq 0$,
4. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Основные формулы дифференцирования.

1. $C' = 0\ (C = const)$
2. $(kx+b)' = k\ ;\ x' = 1$
3. $(x^a)' = ax^{a-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x| < 1)$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = (-\mathrm{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Касательная к графику функции

Если прямая не параллельна оси Oy, то ее уравнение может быть записано в виде $y = kx + b$.

Коэффициент k называют угловым коэффициентом прямой: $k = \mathrm{tg}\alpha$, где α — величина угла между этой прямой и положительным направлением оси Ox, $0 \le \alpha < 180^\circ$, $\alpha \ne 90^\circ$.

Уравнение касательной, к графику функции $y = f(x)$ в его точке $(x_0;\ y_0)$ задается формулой $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $f'(x_0) = k$ — угловой коэффициент касательной.

Промежутки монотонности функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на множестве* $M \subseteq D(f)$, если для любых значений аргумента $x_1; x_2$ из M выполняется условие $(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1))$.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке промежутка $(a;\ b)$, то $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом промежутке.

Теорема 2. Если функция непрерывна на промежутке $[a;\ b]$ и возрастает (убывает) на промежутке $(a;\ b)$, то она возрастает (убывает) и на промежутке $[a;\ b]$.

Промежутки, на которых функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) называются *промежутками монотонности* функции $y = f(x)$.

Замечание. Функция возрастающая (убывающая) на всей области определения называется *возрастающей* (*убывающей*) функцией.

Замечание. Функция, возрастающая (убывающая) на каждом из нескольких промежутках *не обязательно* убывает на их объединении.

Первообразная

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке, если $F(x)' = f(x)$ на этом промежутке. Все первообразные функции $f(x)$ запишутся в виде $F(x) + C$, где C — все возможные постоянные.

Правила вычисления первообразных

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то:

- *F(x) + H(x)* — первообразная для *f(x) + h(x)*
- *kF(x)* — первообразная для *kf(x)*
- *F(kx + b)/k* — первообразная для $f(kx + b)$

Основные первообразные (добавление констант в правой части опущено)

1. $f(x) = k \to F(x) = kx$
2. $f(x) = x^\alpha\ (\alpha \ne -1) \to F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} \to F(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = e^x \to F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x \to F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$
6. $f(x) = \sin x \to F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x \to F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} \to F(x) = -\mathrm{ctg}x$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \to F(x) = \mathrm{tg}x$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to F(x) = \arcsin x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \to F(x) = \mathrm{arctg}x$

Интеграл и его вычисление

Определение. Множество первообразных данной функции f называют **неопределённым интегралом (общим интегралом)** f.

Определение. Определенным интегралом функции f(x) на отрезке $[a, b]$ называется число, равное площади части плоскости, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, кривой $y = f(x)$ и осью Ox.

Формула вычисления определенных интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ (*Формула Ньютона-Лейбница*).

Площадь *криволинейной трапеции* – части плоскости, ограниченной прямыми $x = a, x = b$, где $a < b$, кривой $y = f(x)$ и осью *Ox*, находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Если фигура ограничена сверху кривой $y = f_1(x)$, а снизу — кривой $y = f_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$, равен

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$